28-03-2018

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Rightarrow f$ ομ. συνχ.

π.χ $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνχ. $c>0$: $f(x)\geq c>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{1}{f(x)}, x\in\mathbb{R}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομ. συνχ.

Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall x,y\in\mathbb{R}$ αν $|x-y|<\delta \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|<\varepsilon$ $\qquad P(x,y)$

f: ομ. συνχ. $\Rightarrow$ Αν $\varepsilon>0$. $\exists \delta_1>0 : |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$P(x,y)=\frac{|f(y)-f(x)|}{|f(x)||f(y)|}\leq\frac{1}{c^2}|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{c^2}c^2=\varepsilon$ //

2ος τρόπος (Αρχή μεταφοράς)
Αρκεί όταν $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq\mathbb{R}$ με $x_n-y_n\to 0$ να συνεπάγεται $\left|\frac{1}{f(x_n)}-\frac{1}{f(y_n)}\right|\to 0$

$\varepsilon_n=\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{f(x_n)f(y_n)}\leq\frac{1}{c^2}|f(x_n)-f(y_n)|\to 0$ επειδή η f είναι ομ. συνχ.

$f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$

$x_n = n \to +\infty$

$y_n = n+\varepsilon_n$

με $\varepsilon_n \to 0$, $f(y_n)-f(x_n) = (n+\varepsilon_n)^3 - n^3 =$

$= \boxed{\varepsilon_n^3 + 3n\varepsilon_n^2 + 3n^2\varepsilon_n} \to 3 \neq 0.$

$\cancel{\downarrow}$ $\boxed{\varepsilon_n \to 0}$

0

Άρα διαλέγουμε $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^2}$ Άρα

$f(x) = \begin{cases} 2x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$

Γενικά: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ① $f/$ομ. συνχ. ② $f/(-\infty,0]$ ομ συνχ. $\Big\}$ f ομ. συνχ. στο $\mathbb{R}$

$f_1:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=2x$ $f\in Lip(2) \Rightarrow f$ ομοιομ. συνχ.

το ίδιο και για $f_2:(-\infty,0]$.

$f(x) = \begin{cases} 4, & x\in(0,1) \\ 5, & x\in(1,2) \end{cases}$ $f:(-\infty,1]\cup[1,+\infty)\to\mathbb{R}$

ώστε $f/(-\infty,1]$ και η $f/[1,+\infty)$

ομ. συνεχ.

Αρκεί αν $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$: αν $x, y \in (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$ με
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

① Για $\varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$: αν $x, y \in (-\infty, 1]$ με $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

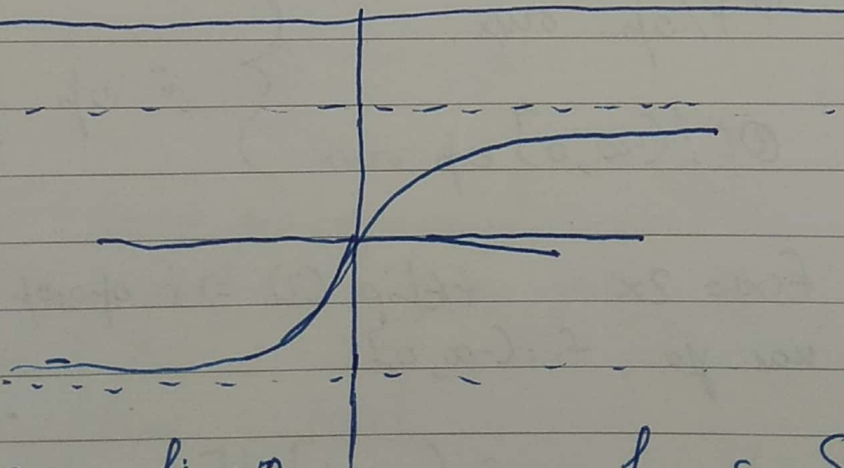
② » $\exists \delta_2>0$: αν $x, y \in [1, +\infty)$ με $|x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\delta = \{\min\{\delta_1, \delta_2\}\}$

$\forall x, y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow \begin{cases} |x-y|<\delta_1 \\ <\delta_2 \\ <2 \end{cases}$

Εφόσον $|x-y|<2$
$\Rightarrow x, y \in (-\infty, -1]$ (I)
$x, y \in [1, +\infty)$ (II)
} Επίσης θα έχουμε $|x-y|<\delta_1, \delta_2$ αρα. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Από : $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνχ, και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ομ. συνχ. στο $[\alpha, +\infty)$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ $\qquad \ell_1 = \sup\{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

η $f/[0,+\infty)$ είναι ομ. συνχ. $\overset{\text{προηγ.}}{\underset{\text{ασκ.}}{\Rightarrow}}$ ΝΑΙ

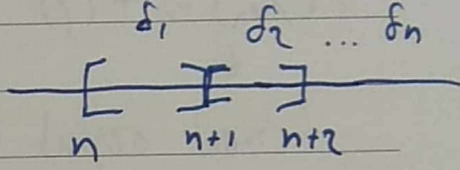
Επίσης $f/(-\infty,0]$ ομ. συνχ.

$\Rightarrow$ f ομ. συνχ στο $\mathbb{R}$

Δίνεται $f[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνχ, ώστε $f/[1,+\infty)$ ομ. συνχ $\to$ f ομ. συνχ. στο Π.Ο.

f συνχ στο $[0,1] \Rightarrow$ f ομ. συνχ. $[0,1]$

$f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ όχι ομ. συνχ.



$f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ ομ. συνχ. $\Rightarrow$ f φραγμένη

$\Downarrow$

$$\exists \lim_{x\to\alpha^+} f(x), \ \exists \lim_{x\to\beta^-} f(x)$$

$\Rightarrow \exists\, g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R} : g|(\alpha,\beta) = f$
g συνεχής

$\to \exists\, M>0 : |g(x)| \leq M \ \forall x \in [\alpha,\beta]$
$\to |f(x)| \leq M \ \forall x \in (\alpha,\beta)$ //

2ος τρόπος : Έστω f όχι φραγμένη
$\Rightarrow \nexists\, M>0 : \forall x \in (\alpha,\beta) \ |f(x)| \leq M$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in (\alpha, b) : |f(x_n)| \geq n$

$\alpha < x_n < b$ φραγμένη $(x_n) \rightarrow \exists (x_{k_n})_n$ υπακ. και $l \in [\alpha, b]$ ώστε $x_{k_n} \rightarrow l$

(Αν $l \in (\alpha, b)$ επειδή f συνχ. στο $l \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow f(l)$

$\Downarrow$

Επειδή $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$

$\downarrow$

$+\infty$

$\Rightarrow (f(x_{k_n}))$ δεν είναι φραγμένη ②

$f(x_{k_n}) \rightarrow f(l)$

$\Downarrow$

$f(x_{k_n})$ συγκλ. ①

①,② Άτοπο.

$x_{k_n} \rightarrow l \in [\alpha, b]$

$(x_{k_n})_n$ Cauchy (βασική)

$\Downarrow$ f ομ. συνχ.

$f(x_{k_n})$ Cauchy $\Rightarrow (f(x_{k_n})_n)$ φραγμ.